

# MODELOS PROBABILÍSTICOS ALTERNATIVOS PARA EL MÉTODO PERT. APLICACIÓN AL ANÁLISIS DE INVERSIONES

RAFAEL HERRERÍAS PLEGUEZUELO

*Universidad de Zaragoza*

## 1. INTRODUCCIÓN

Los objetivos principales de este trabajo son: primero poner de relieve algunas cuestiones relativas a los modelos probabilísticos, utilizados tradicionalmente en el análisis de inversiones, cuando se utiliza como criterio de selección el valor capital; segundo obtener unos modelos alternativos para el estudio del comportamiento aleatorio de los flujos de caja de una inversión, generada a partir del sistema de distribuciones de probabilidad continuas univariantes de tipo Pearson; tercero seleccionar aquellas distribuciones del sistema de Pearson que tengan igual media que los modelos clásicos, pero que sus varianzas sean mayores, por lo que conducirán a resultados más conservadores; cuarto realizar un estudio comparativo de los modelos obtenidos; quinto hacer posible la valoración de la bondad de la estimación del valor más probable, en la proporción que se desee y sexto señalar algunas de las posibles vías de investigación que pueden ampliar los resultados obtenidos en este trabajo.

## 2. CONSIDERACIONES SOBRE EL MODELO PROBABILÍSTICO CLÁSICO DEL PERT

El uso de la metodología PERT tiene gran aceptación en la práctica, por la forma tan simple que tiene de calcular la duración de una actividad, basándose en tres posibles fechas de duración de la misma: i) la más probable, ii) la pesimista e iii) la optimista. El modelo probabilístico básico lo constituye una forma muy particular de distribución beta:

$$f(x) = \frac{(x-a)^{p-1}(b-x)^{q-1}}{(b-a)^{p+q-1} \mathbf{B}(p,q)} \quad \text{si } a < x < b \quad \text{y} \quad p > 1, \quad q > 1 \quad (1)$$

que corresponde al primer caso de las distribuciones beta de tipo uno<sup>1</sup>, caracterizado porque los valores de  $p$  y  $q$  tienen que ser ambos mayores que la unidad; en tal caso la gráfica de la distribución tiene una forma acampanada, asimétrica y, en general, la media no coincide con la moda o valor más probable, cortando al eje de abscisas en dos puntos  $a$  y  $b$ .

El modelo para PERT se concreta aún más y se elige, entre otras razones<sup>2</sup>, por motivo de facilidad de cálculo de las características estocásticas, que los exponentes  $p$  y  $q$  sean  $3 + \sqrt{2}$  y  $3 - \sqrt{2}$  respectivamente, si la moda  $m$  de la distribución es mayor que el punto medio del intervalo de definición, o bien que sean  $3 - \sqrt{2}$  y  $3 + \sqrt{2}$  si  $m$  es inferior al citado punto medio<sup>3</sup>.

Esta es la razón de que la distribución no esté totalmente identificada cuando se conoce el intervalo de variación  $(a,b)$ , ya que hay que dilucidar si  $p = 3 + \sqrt{2}$  y  $q = 3 - \sqrt{2}$  ó  $p = 3 - \sqrt{2}$  y  $q = 3 + \sqrt{2}$ , según sea " $m$ " mayor o menor que  $(a+b)/2$ . En el caso de que  $m = (a+b)/2$  la distribución es simétrica

A esta misma conclusión, de casi completa identificación de la distribución beta empleada se llega utilizando las relaciones simplificadoras de la página 148 de Suárez (1980), pues el sistema

$$\begin{cases} \mathbf{a} + \mathbf{g} = 4 \\ \frac{(\mathbf{a}+1)(\mathbf{g}+1)}{\mathbf{a} + \mathbf{g} + 3} = 1 \end{cases}$$

se deduce una ecuación de segundo grado que tiene por soluciones:

$$\mathbf{a} = 2 + \sqrt{2} \text{ y } \mathbf{g} = 2 - \sqrt{2} \text{ ó}$$

$$\mathbf{a} = 2 - \sqrt{2} \text{ y } \mathbf{g} = 2 + \sqrt{2}$$

que coincide con lo anteriormente expuesto, teniendo en cuenta que  $\mathbf{a} = p - 1$  y  $\mathbf{g} = q - 1$ , basta compara la expresión dada por Suárez, (1980) en la página 147 y la expresión (1) anterior

Dentro de la filosofía del PERT<sup>4</sup>, la media estimada o tiempo medio calculado indica la fecha de terminación de cierta actividad con la mayor

<sup>1</sup> Véase, por ejemplo, en Dumas de Raully (1968), pp 57-59, las tres formas de distribución beta del tipo uno, y en la página 67 la distribución beta de tipo dos.

<sup>2</sup> Véase en Hillier-Lieberman (1982), pp 247-248, razones "lógicas" para las estimaciones de la media y varianza del modelo básico. Y en el Apéndice 1 de Miller (1970), una versión simplificada del desarrollo matemático contenido en el informe de la fase I del Pert original.

<sup>3</sup> Véase el Apéndice I de Yu Chuen-Tao (1980).

<sup>4</sup> Véase Taha (1981), pág 374.

aproximación de acertar, siendo la varianza la que indica el riesgo de no acertar en la duración media calculada para la actividad a desarrollar, es decir, es la medida adecuada de expresar la incertidumbre y no interesa, por ello, minorizarla, pues si se hace se concluye con resultados finales optimistas. Por lo expuesto, es práctica común en la utilización del PERT que si dos o más rutas tienen la misma media, se elige la que tiene mayor varianza, pues refleja mayor incertidumbre y conduce, por tanto, a resultados más conservadores.

Por otra parte, de (1) se tiene, haciendo el cambio de variable,

$$z = \frac{x-a}{b-a} \tag{2}$$

que

$$f(z) = \frac{z^{p-1}(1-z)^{q-1}}{B(p,q)} \quad \text{si } 0 < z < 1 \quad \text{y } p > 1, q > 1$$

y es sobradamente conocido (véase, por ejemplo, página 60 de Dumas de Rauily (1968) que la media y la varianza de la distribución de la variable aleatoria "z" son:

$$E[z] = \frac{p}{p+q} \quad V[z] = \frac{pq}{(p+q+1)(p+q)^2}$$

por lo que las correspondientes características estocásticas de la variable "x" serán

$$E[x] = \frac{pb+qa}{p+q} \quad V[x] = \frac{(b-a)^2 pq}{(p+q+1)(p+q)^2}$$

como puede apreciarse, sólo en el numerador de la expresión de la media hay que saber si  $p = 3 + \sqrt{2}$  ó  $p = 3 - \sqrt{2}$  ; para obviar esto y teniendo en cuenta que (1) presenta la moda en el punto

$$m = \frac{b(p-1) + a(q-1)}{p+q-2}$$

se tiene que la expresión de  $E[x]$  puede escribirse así:

$$E[x] = \frac{a + (p+q-2)m + b}{p+q}$$

por lo que al considerar los valores de "p" y "q"

$$p = 3 + \sqrt{2} \quad \text{y } q = 3 - \sqrt{2} \quad \text{ó } p = 3 - \sqrt{2} \quad \text{y } q = 3 + \sqrt{2},$$

se obtienen las expresiones clásicas:

$$E[x] = \frac{a+4m+b}{6} \quad V[x] = \frac{(b-a)^2}{36} \tag{3}$$

que evitan el anterior punto de incertidumbre.

Obsérvese que las expresiones (3) se han obtenido sin utilizar: a) simplificaciones en las expresiones paramétricas, tal como hace, por ejemplo, Suárez (1980) en la página 148, y que él mismo apunta que han sido fuertemente criticadas por Gilles Thomas, al no existir fundamento teórico alguno para su uso (véase Suárez (1980) ,página 149); ni razones lógicas, tal como hacen Hillier y Lieberman (1982), sino que se han obtenido determinando casi completamente una distribución beta del tipo uno.

Es sorprendente que la misma distribución beta, con los mismos valores para los parámetros “p” y “q”:  $b(3+\sqrt{2};3-\sqrt{2})$  ó  $b(3-\sqrt{2};3+\sqrt{2})$  se aplique como modelo a todos los problemas en los que se usa el método PERT, variando solamente: 1º el recorrido (a, b), que, por otra parte, puede normalizarse a (0, 1) con el cambio de variable (2), con lo dejaría de influir, y 2º la posición relativa de la moda con respecto al punto  $(a+b)/2$ , que en la mayoría de las aplicaciones concretas puede presumirse que se conoce, *a priori*, su situación si el técnico que realiza las estimaciones es un buen profesional. Así, por ejemplo, en análisis de inversiones la estimación del flujo de caja más probable en un periodo “t”:  $Q_t^m = m$ , está más próximo de la estimación del flujo de caja más optimista para ese periodo:  $Q_t^o = b$ , que de la estimación del flujo de caja más pesimista:  $Q_t^p = a$ . Por tanto, m estará a la derecha de  $(a+b)/2$ , con lo que  $p = 3 + \sqrt{2}$  y  $q = 3 - \sqrt{2}$ , y estará totalmente determinada por<sup>5</sup>:

$$m = \frac{b(p-1) + a(q-1)}{p+q-2} = \frac{b(2+\sqrt{2}) + a(2-\sqrt{2})}{4} = \frac{a+b}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}(b-a)$$

valor este que muy posiblemente no coincidirá con la estimación dada por él.

<sup>5</sup> En tales casos  $8(b-m)(m-a) = (b-a)^2$  ya que

$$\begin{aligned} (b-m)(m-a) &= \left[ b - \frac{a+b}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}(b-a) \right] \left[ \frac{a+b}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}(b-a) - a \right] = \\ &= \left[ \frac{b-a}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}(b-a) \right] \left[ \frac{b-a}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}(b-a) \right] = \frac{(b-a)^2}{4} - \frac{1}{8}(b-a)^2 = \frac{1}{8}(b-a)^2 \end{aligned}$$

y simétricamente:

$$\begin{aligned} &\left[ b - \frac{a+b}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}(b-a) \right] \left[ \frac{a+b}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}(b-a) - a \right] = \\ &= \left[ \frac{b-a}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}(b-a) \right] \left[ \frac{b-a}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}(b-a) \right] = \frac{1}{8}(b-a)^2 \end{aligned}$$

Análogamente puede razonarse para la duración de una actividad donde, por la pericia del técnico, la estimación del tiempo más probable estará más cercana al punto "a" que al valor "b", con lo cual "m" estará a la izquierda del punto medio del intervalo de definición y quedará determinada por el valor<sup>6</sup>:

$$m = \frac{a+b}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}(b-a)$$

Todas estas consideraciones y las críticas<sup>7</sup> a las que se ve sometida la metodología PERT en la actualidad, nos han llevado a plantearnos unos modelos probabilísticos alternativos al modelo clásico, generado por una subfamilia de distribuciones del sistema de Pearson continuo univariante que puedan usarse en el método PERT: 1º que no tengan los inconvenientes apuntados para las distribuciones beta; 2º que contengan a esta como caso muy particular y 3º que el cálculo de sus características estocásticas sea simple, para que puedan utilizarse en la práctica con una comodidad semejante al modelo clásico.

### 3. ALGUNAS RELACIONES ENTRE LAS CARACTERÍSTICAS ESTOCÁSTICAS DE LOS MODELOS PROBABILÍSTICOS MÁS USADOS EN EL ANÁLISIS DE INVERSIONES

Es suficientemente conocido que las medias y varianzas de tres distribuciones de probabilidad utilizadas en análisis de inversiones, beta, triangular y uniforme son:

$$E[B] = \frac{Q_i^o + 4Q_i^m + Q_i^p}{6} \quad V[B] = \frac{(Q_i^o - Q_i^p)^2}{36}$$

$$E[T] = \frac{Q_i^o + Q_i^m + Q_i^p}{3} \quad V[T] = \frac{(Q_i^o - Q_i^p)^2 - (Q_i^m - Q_i^p)(Q_i^o - Q_i^m)}{18}$$

$$E[U] = \frac{Q_i^o + Q_i^p}{2} \quad V[U] = \frac{(Q_i^o - Q_i^p)^2}{12}$$

En general se tiene que

$$V[B] < V[T] < V[U]$$

ya que como

<sup>6</sup> Véase nota 5

<sup>7</sup> Puede verse al respecto el trabajo de Vazsonyi (1970)

$$(Q_t^o - Q_t^p)^2 - 2(Q_t^m - Q_t^p)(Q_t^o - Q_t^m) > 0$$

se deduce primero que

$$V[B] < V[T]$$

y segundo que

$$V[T] < V[U],$$

por simple diferencia de estas expresiones.

En el caso particular de que

$$Q_t^m = \frac{Q_t^o + Q_t^p}{2}$$

se verifica

$$E[B] = E[T] = E[U]; \quad V[B] = \frac{V[T]}{2} = \frac{V[U]}{3}$$

La utilización práctica de uno u otro modelo depende del nivel de información que se disponga, para estimar los dos o tres flujos de caja precisos y de la acuracidad que se suponga tiene la estimación del flujo de caja más probable.

#### 4. LAS CURVAS DE PEARSON PARA LOS FLUJOS DE CAJA DE UNA INVERSIÓN

Se parte del conocido sistema de distribuciones de probabilidad continuas univariantes de tipo Pearson, particularizado en la variable  $Q_t^r$ , que representa el flujo de caja de una inversión para un periodo de tiempo "t",

$$\frac{f'(Q_t^r)}{f(Q_t^r)} = \frac{Q_t^r - a_0}{b_0 + b_1 Q_t^r + b_2 (Q_t^r)^2} \quad (4)$$

y se imponen las dos condiciones básicas, que cumple el modelo probabilístico que se utiliza en la metodología PERT, a saber

- i) La distribución tiene un máximo relativo, es decir es unimodal
- ii) La distribución se anula en los extremos del recorrido, es decir la ecuación  $f(Q_t^r) = 0$  tiene dos raíces diferentes y finitas. Más aún, por la naturaleza de los fenómenos a los que se aplica la metodología PERT, dichas raíces deben ser positivas en la mayoría de los casos, pues no tiene sentido hablar de tiempos negativos. Aunque no ocurre lo mismo cuando se trata de flujos de caja, ya que al ser  $Q_t^r$  el flujo neto de caja o cash-flows del periodo "t", será igual a la diferencia entre los cobros,  $C_t$ , y los pagos,  $P_t$ , de ese mismo

periodo de tiempo, por lo que el flujo puede ser negativo, basta con que  $P_t > C_t$ .

Las distribuciones de probabilidad que pertenecen al sistema de Pearson pueden clasificarse atendiendo a distintos criterios, así Elderton y Jonhson (1969) las clasifican, siguiendo a Pearson, atendiendo a la naturaleza de las raíces del denominador del segundo miembro de (4) y su posición respecto de la media de la distribución. Cansado (1950) logra una clasificación más reducida, considerando los valores que pueden presentar las raíces, pero también pueden clasificarse las distribuciones continuas univariantes utilizando los coeficientes

de asimetría y curtosis de Fisher:  $g_1 = \frac{m_3}{s^3}$  y  $g_2 = \frac{m_4}{s^4} - 3$ , o de Pearson,

$b_1 = g_1^2$  y  $b_2 = g_2 + 3$ , en tres grandes tipos: de forma acampanada, de forma en J y de forma en U<sup>8</sup>.

Nuestro interés claramente se centra en distribuciones con gráfica del primer tipo, que son las que pueden utilizarse en la metodología PERT. Si la distribución es simétrica, los coeficientes de asimetría son nulos; por el contrario, si es asimétrica, el signo de  $g_1$  es el mismo que el de  $(m - m)$ . En este caso la distribución puede clasificarse en función del valor del coeficiente K de Pearson:

$$K = \frac{b_1(b_2 + 3)^2}{4(4b_2 - 3b_1)(2b_2 - 3b_1 - 6)}$$

en la forma siguiente<sup>9</sup>:

- 1° Si  $K < 0$ , el recorrido de la distribución está acotado por los dos lados.
- 2° Si  $0 < K < 1$  el recorrido de la distribución no está acotado por ningún lado.
- 3° Si  $K \geq 1$  el recorrido de la distribución está acotado por un sólo lado, estando la cola en el lado que marca el signo de la asimetría estimada por el coeficiente de Fisher.

Volviendo a la ecuación diferencial (4) y a las dos condiciones que se deben imponer a los modelos para utilizar en el PERT, resulta que de i) se deduce que

$$\begin{aligned} \exists_1 Q_t^{r_0} / f'(Q_t^{r_0}) &= 0 \\ \Rightarrow Q_t^{r_0} &= a_0 = \text{moda de la distribución} \end{aligned}$$

<sup>8</sup> Véase p.53 del tomo I del texto del Comisariado francés de la Energía Atómica (1978).

<sup>9</sup> Véase p.58 del tomo I del texto del Comisariado francés de la Energía Atómica (1978). Evidentemente, si  $k=0$ , la distribución es simétrica y nuestros modelos deben estar encuadrados en el caso 1°.

$$\Rightarrow a_0 = Q_i^m = \text{flujo de caja más probable}$$

De ii) se tiene que

$$b_0 + b_1 Q_i^r + b_2 (Q_i^r)^2 = b_2 (Q_i^r - Q_i^{r_1}) (Q_i^r - Q_i^{r_2})$$

donde  $Q_i^{r_1}$  y  $Q_i^{r_2}$  son tales que

$$f(Q_i^{r_1}) = f(Q_i^{r_2}) = 0,$$

luego

$$Q_i^{r_1} = Q_i^p \text{ y } Q_i^{r_2} = Q_i^o.$$

Utilizando estas relaciones (4) se puede escribir como

$$\frac{f'(Q_i^r)}{f(Q_i^r)} = \frac{Q_i^r - Q_i^m}{b_2 (Q_i^r - Q_i^p) (Q_i^r - Q_i^o)} \quad (5)$$

de donde:

$$f'(Q_i^r) b_2 (Q_i^r - Q_i^p) (Q_i^r - Q_i^o) = f(Q_i^r) (Q_i^r - Q_i^m)$$

y multiplicando por  $(Q_i^r)^n$  e integrando en el recorrido de  $Q_i^r : (Q_i^p, Q_i^o)$ , se tiene, llamando  $\mathbf{a}_k$  a los momentos de orden k respecto al origen:

$$-b_2 [(n+2)\mathbf{a}_{n+1} - (n+1)(Q_i^o + Q_i^p)\mathbf{a}_n + nQ_i^o Q_i^p \mathbf{a}_{n-1}] = \mathbf{a}_{n+1} - Q_i^m \mathbf{a}_n$$

obteniéndose para n=0 y n=1 las relaciones de recurrencia siguientes:

$$\begin{aligned} -b_2 [2\mathbf{a}_1 - (Q_i^o + Q_i^p)] &= \mathbf{a}_1 - Q_i^m \\ -b_2 [3\mathbf{a}_2 - 2(Q_i^o + Q_i^p)\mathbf{a}_1 + Q_i^o Q_i^p] &= \mathbf{a}_2 - Q_i^m \mathbf{a}_1 \end{aligned}$$

De la primera expresión se tiene que

$$\mathbf{a}_1 = \frac{b_2 (Q_i^o + Q_i^p) + Q_i^m}{2b_2 + 1} \quad (6)$$

y de la segunda

$$\mathbf{a}_2 = \frac{Q_i^m \mathbf{a}_1 + 2b_2 \mathbf{a}_1 (Q_i^o + Q_i^p) - b_2 Q_i^o Q_i^p}{3b_2 + 1} \quad (7)$$

sustituyendo en (7) el valor de  $\mathbf{a}_1$  en función de  $b_2$  dado por (6), obtenemos:

$$\mathbf{a}_2 = \frac{2b_2^2 [(Q_i^p)^2 + (Q_i^o)^2 + Q_i^p Q_i^o] + b_2 [3Q_i^m (Q_i^o + Q_i^p) - Q_i^o Q_i^p] + (Q_i^m)^2}{(2b_2 + 1)(3b_2 + 1)}$$

por lo que la varianza, en función de  $b_2$ , será:

$$\mathbf{s}^2 = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1^2 = \frac{b_2 [(b_2^2 + b_2)(Q_i^o - Q_i^p)^2 + (Q_i^o - Q_i^m)(Q_i^m - Q_i^p)]}{(2b_2 + 1)^2 (3b_2 + 1)} \quad (8)$$



5. OBTENCIÓN Y COMPARACIÓN DE LOS DISTINTOS MODELOS GENERADOS POR EL SISTEMA DE PEARSON

Los diferentes modelos se obtienen particularizando el coeficiente  $b_2$  del denominador de la expresión (4). En primer lugar, en el apartado A, vamos a centrar nuestra atención en los modelos más parecidos a los utilizados en el análisis de inversiones, reservando el apartado B para otros modelos de interés, que surgen cuando se considera  $b_2 \in Q^+$ .

**A) Modelos usuales en el análisis de inversiones**

1. *Modelo límite*

Como su nombre indica, se obtiene para  $b_2 \rightarrow \infty$ , y en tal caso las expresiones (6) y (8) quedan reducidas a:

$$a_1 = \frac{Q_t^o + Q_t^p}{2}$$

$$s^2 = \frac{(Q_t^o - Q_t^p)^2}{12}$$

que son las características estocásticas de la distribución uniforme.

Este resultado concuerda con que, en este caso, la expresión (4) queda reducida a:

$$f(Q_t^r) = 0 \text{ para } Q_t^p < Q_t^r < Q_t^o$$

luego

$$f(Q_t^r) = \text{constante} = k$$

y como

$$\int_{Q_t^p}^{Q_t^o} k dQ_t^r = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{Q_t^o - Q_t^p},$$

por lo que se obtiene la densidad de la distribución rectangular en el intervalo  $(Q_t^p, Q_t^o)$ .

2. *Modelo simple*

Llamamos así al que se genera para  $b_2 = 1$ . Resultando que las expresiones (6) y (8) valdrán

$$a_1 = \frac{Q_t^o + Q_t^p + Q_t^m}{3} \quad s^2 = \frac{(Q_t^o - Q_t^p)^2}{18} + \frac{(Q_t^m - Q_t^p)(Q_t^o - Q_t^m)}{36}$$

que corresponden a una distribución de Pearson de tipo I, de igual media que la distribución triangular, pero con una varianza mayor, en

$(Q_t^m - Q_t^p)(Q_t^o - Q_t^m)/36$  que dicha distribución. Por lo que, mediante su utilización, se consiguen resultados más conservadores que los obtenidos usando la distribución triangular y pensando que cuando se utiliza como modelo esta última, es porque no se confía demasiado en la acuracidad de la estimación de  $Q_t^m$ , parece conveniente dar un mayor grado de incertidumbre, esto es, considerar el modelo de mayor varianza, que en este caso es el generado por el sistema de Pearson.

3. Modelos alternativos al modelo clásico

Cuando se considera  $b_2 = 1/4$ , las expresiones (6) y(8) pasan a ser:

$$a_1 = \frac{Q_t^p + 4Q_t^m + Q_t^o}{6} \quad s^2 = \frac{5}{7} \frac{(Q_t^o - Q_t^p)^2}{36} + \frac{16}{7} \frac{(Q_t^o - Q_t^m)(Q_t^m - Q_t^p)}{36} \quad (9)$$

que son las características estocásticas de una distribución de Pearson de tipo uno, que tiene igual media que la distribución beta y cuya varianza vamos a estudiar comparándola con la varianza del modelo clásico. Surgen así tres casos que corresponden a que:

$$(Q_t^o - Q_t^p)^2 \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} 8(Q_t^o - Q_t^m)(Q_t^m - Q_t^p) \Rightarrow V(B) \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} V(P_{1/4}) \quad (10)$$

Evidentemente, los modelos de mayor interés serán aquellos en que su varianza sea mayor que la correspondiente a la distribución beta, que se caracterizan porque:

$$(Q_t^o - Q_t^m)^2 + (Q_t^m - Q_t^p)^2 - 6(Q_t^o - Q_t^m)(Q_t^m - Q_t^p) < 0,$$

luego, representando la parábola  $y = Q^2 - 6Q + 1$

en la variable  $Q = \frac{Q_t^o - Q_t^m}{Q_t^m - Q_t^p}$  ó en su recíproca  $\frac{Q_t^m - Q_t^p}{Q_t^o - Q_t^m}$ ,

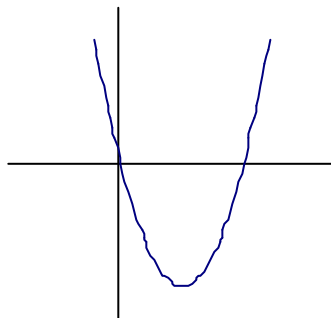


Figura 1

se tiene el siguiente resultado general:

“Si el valor de  $Q$  (o su recíproco) está dentro del intervalo  $(3 - 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2})$ , la varianza que suministra la distribución obtenida del sistema de Pearson para  $b_2 = 1/4$  es mayor que la varianza de la distribución beta”

Como corolario de este resultado se tiene la siguiente regla práctica de actuación: se construye una fracción de los valores  $Q_t^m, Q_t^o$  y  $Q_t^p$ , de la forma siguiente: se sitúa la mayor de las dos diferencias  $Q_t^m - Q_t^p$  ó  $Q_t^o - Q_t^m$  en el numerador y la menor en el denominador; si el valor de la misma es inferior a  $3 + 2\sqrt{2} \cong 5,8284 \cong 6$  se concluye que el modelo construida a partir del sistema de Pearson para  $b_2 = 1/4$  tiene una varianza que es mayor que la correspondiente a la distribución beta y, en el caso de que se quiera huir de resultados finales excesivamente optimistas, debe usarse el modelo Pearsoniano. También puede usarse como regla práctica la propia desigualdad (10).

Nótese que es bastante improbable, en la práctica, que el valor de la fracción anterior supere a  $3 + 2\sqrt{2}$ . En caso de que esto ocurra debe usarse la distribución beta, ya que tendrá mayor varianza que la distribución de Pearson correspondiente.

En el caso de que

$$(Q_t^o - Q_t^p)^2 = 8(Q_t^o - Q_t^m)(Q_t^m - Q_t^p) \Rightarrow V(B) = V(P_{1/4})$$

y despejando  $Q_t^m$  en función de  $Q_t^o$  y  $Q_t^p$  se tiene que

$$Q_t^m = \frac{Q_t^o + Q_t^p}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{4}(Q_t^o - Q_t^p)$$

Y recíprocamente, si se estima  $Q_t^m$  por alguno de los dos valores señalados, se tiene que  $(Q_t^o - Q_t^p)^2 = 8(Q_t^o - Q_t^m)(Q_t^m - Q_t^p)$ , como se puso de evidencia en la nota de pie de página número 5. Esto ocurre así porque la distribución generada del sistema de Pearson, en este caso, es la propia distribución beta.

**B) Otros modelos de interés**

De la infinidad de modelos que se obtienen de (4) para los diferentes valores de  $b_2$ , vamos a considerar aquellos en los que  $b_2$  es un número racional positivo, y en particular los que surgen para  $b_2 = 1/s$  con  $s \in Z^+$ , pues son estos los que ponderan, en forma entera, la confianza en la exactitud de la estimación del flujo de caja más probable.

Las expresiones (6) y (8) cuando  $b_2 = r/s$  se convierten en

$$\mathbf{a}_1 = \frac{rQ_t^o + sQ_t^m + rQ_t^p}{2r + s} \quad (11)$$

$$\mathbf{s}^2 = \frac{r^3(Q_t^o - Q_t^p)^2 + r^2s(Q_t^o - Q_t^p)^2 + rs^2(Q_t^m - Q_t^p)(Q_t^o - Q_t^m)}{(2r + s)^2(3r + s)} \quad (12)$$

obteniéndose de aquí los casos particulares importantes  $b_2 = r/s = 1/s$  y  $b_2 = r/s = r$ , al hacer  $r = 1$  ó  $s = 1$ . Como casos más singulares se han destacado anteriormente  $r \neq 0$  y  $s \rightarrow 0$ ,  $r = s$  y  $r = 1$  con  $s = 4$ .

Para el caso  $b_2 = 1/s$  con  $s \in Z^+$  se tiene:

$$\mathbf{a}_1 = \frac{Q_t^o + sQ_t^m + Q_t^p}{2 + s}$$

$$\mathbf{s}^2 = \frac{(1 + s)(Q_t^o - Q_t^p)^2 + s^2(Q_t^m - Q_t^p)(Q_t^o - Q_t^m)}{(2 + s)^2(3 + s)} \quad (13)$$

que como se aprecia en  $\mathbf{a}_1$ , permiten ponderar la estimación de  $Q_t^m$  en la proporción entera que se desee. Los comentarios sobre la varianza se posponen al apartado siguiente.

## 6. ESTUDIO DE LA VARIANZA EN FUNCIÓN DE LOS POSIBLES VALORES DE $b_2$

Independientemente de las consideraciones hasta ahora realizadas, puede estudiarse la expresión de la varianza de los modelos de Pearson (8) en función de los posibles valores de  $b_2$ . Para ello, y con objeto de simplificar notaciones, llamamos a

$$\begin{aligned} (Q_t^o - Q_t^p)^2 &= A^2; \\ Q_t^o - Q_t^m &= B \\ Q_t^m - Q_t^p &= C \\ b_2 &= x \end{aligned}$$

Con lo que tenemos que la varianza  $\mathbf{s}^2 = y$  es una función de  $b_2 = x$ , que puede escribirse así:

$$y = \frac{A^2 x^3 + A^2 x^2 + BCx}{12x^3 + 16x^2 + 7x + 1}$$

con las restricciones

$$A^2 - 4BC > 0,$$

$$B > 0,$$

$$C > 0$$

$$A = B + C$$

**A) Caso particular**

En el caso particular de que  $A^2 = 4BC$ , (cuestión que ocurre cuando  $Q_t^m = (Q_t^o + Q_t^p)/2$ ), la función anterior se reduce a la expresión siguiente:

$$y = \frac{BCx}{3x+1}$$

que tiene una representación gráfica

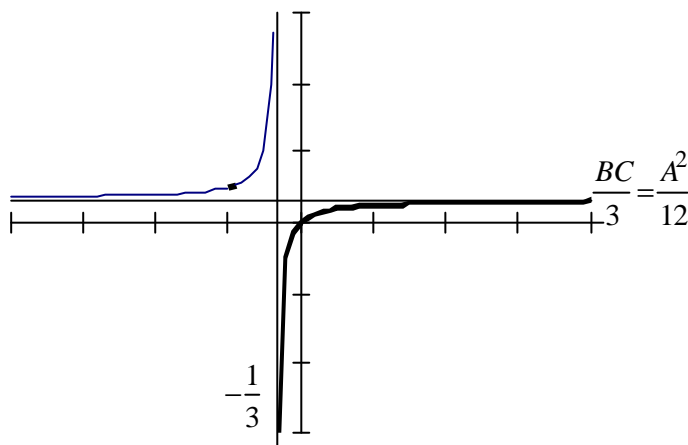


Figura 2

de la que pueden hacerse las siguientes observaciones:

- 1ª Deben eliminarse las partes correspondientes al tercer y cuarto cuadrante por el propio significado de la función.
- 2ª Si se consideran sólo valores positivos para  $b_2 = x$ , cuestión que no resta generalidad, la representación quedaría reducida al trazo del primer cuadrante, en el que se aprecia que la función es monótona creciente, comenzando en el origen y teniendo como cota  $BC/3 = A^2/12$  en este caso, que corresponde a la varianza de la distribución uniforme.

**B) Caso general**

Al representar la curva general se presentan problemas de interpretación al no estar explicitadas las constantes. Así, por ejemplo, cuando se quiere determinar los cortes con los ejes se obtienen los puntos siguientes:

$$x_1 = 0; \quad x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{BC}{A^2}} \quad \text{y} \quad x_3 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{BC}{A^2}}$$

Como la cantidad subradical es positiva, porque  $A^2 - 4BC > 0$ , se tiene que el radical es menor que  $1/2$ , por tanto las raíces  $x_2 < 0$  y  $x_3 < -1/2$ . El que las raíces fuesen negativas estaba determinado por la existencia de dos permanencias en los signos de los coeficientes de la ecuación  $A^2x^2 + A^2x + BC = 0$ , pero por lo anterior podemos precisar más, una de las raíces es mayor que  $-1/2$ , luego  $-1/2 < x_2 < 0$ , y la otra es menor que  $-1/2$ , pero mayor que  $-1$ , luego  $-1 < x_3 < -1/2$ . No pudiéndose precisar con mayor exactitud los cortes con los ejes, hasta que no estén determinadas las constantes.

Las asíntotas son: verticales  $x = -1/2$  (doble) y  $x = -1/3$

horizontal  $y = A^2/12$ .

Al necesitarse la comparación de la raíz  $x_2$  con la asíntota  $x = -1/3$ , los signos de la función en los entornos de los puntos  $x = -1/2$  y  $x = -1/3$ , las intersecciones con la asíntota horizontal, la determinación exacta de las regiones de existencia y la obtención de los puntos singulares de la curva, se optó por realizar el estudio para diferentes valores numéricos de A, B y C, ya que por la forma de la función, este hecho afectará poco su representación. Así, por ejemplo, si  $A=4$ ,  $B=3$  y  $C=1$  se obtiene la función

$$y = \frac{16x^3 + 16x^2 + 3x}{12x^3 + 16x^2 + 7x + 1} \quad (14)$$

que corta a los ejes en los puntos  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = -1/4$  y  $x_3 = -3/4$ , que tiene una asíntota horizontal  $y = 4/3$  y las mismas asíntotas verticales anteriores del caso general, pero que ahora determinan precisamente la aparición de la curva respecto de las asíntotas verticales:

$$y\left(-\frac{1^+}{2}\right) = y\left(-\frac{1^-}{2}\right) = -\infty = y\left(-\frac{1^-}{3}\right) \text{ e } y\left(-\frac{1^+}{3}\right) = +\infty$$

Las regiones de posible existencia se obtienen de la igualdad:

$$12y\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 16x\left(x + \frac{1}{4}\right)\left(x + \frac{3}{4}\right)$$

y son las regiones no sombreadas de la figura 3.

La intersección de la curva (14) con la asíntota horizontal se produce en los puntos:

$$x_1 = \frac{-19 + \sqrt{105}}{32} \approx -0,2735$$

$$x_2 = \frac{-19 - \sqrt{105}}{32} \approx -0,914$$

Los extremos relativos se obtienen al resolver la ecuación cúbica<sup>10</sup>:

$$32x^3 + 60x^2 + 26x + 3 = 0$$

obteniéndose que las soluciones están en los intervalos:

$$x_1 \in (-0,191, -0,190)$$

(-) (+)

$$x_2 \in (-0,375, -0,374)$$

(+) (-)

$$x_3 \in (-1,3091, -1,3090)$$

(-) (+)

y del estudio del signo de la primera derivada de la función (14):

$$y' = \frac{32x^3 + 60x^2 + 26x + 3}{(2x+1)^3(3x+1)^2}$$

se tiene que en  $x_1$  hay un mínimo relativo y que en  $x_2$  y  $x_3$  existe un máximo relativo, siendo sus ordenadas las siguientes:

$$y(-0,375) \approx -36,057 \quad y(-0,190) \approx -0,6179 \quad \text{e} \quad y(-1,309) \approx -1,618$$

Además  $y'(x) > 0 \quad \forall x > 0$ , luego la curva será creciente en el intervalo  $(0, +\infty)$ .

Para el estudio complementario de concavidad y convexidad de la curva así como la determinación de los puntos de inflexión se requiere la segunda derivada de la función (14):

$$y'' = \frac{384x^4 + 984x^3 + 648x^2 + 152x + 10}{(2x+1)^4(3x+1)^3}$$

y en particular la resolución de la ecuación cuártica<sup>11</sup>

$$192x^4 + 492x^3 + 324x^2 + 76x + 5 = 0$$

<sup>10</sup> Véase pp 259-261 y párrafo 41 del capítulo X del tomo I de Rey Pastor (1969)

<sup>11</sup> Véase pp 262-264 y párrafo 41 del capítulo X del tomo I de Rey Pastor (1969)

cuyas raíces reales, si existen, son negativas. En efecto, se determina que en los intervalos  $(-0,107, -0,106)$  y  $(-1,71, -1,70)$  existen sendos puntos de inflexión.

Con los valores y signos por intervalos de  $y''$  se corrobora lo ya conocido, pudiéndose trazar la gráfica de la curva.

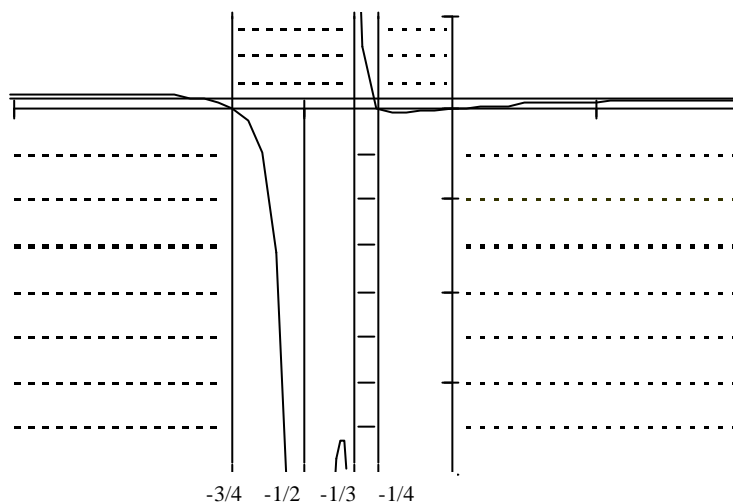


Figura 3

Las consecuencias inmediatas que se obtienen del gráfico son:

- 1ª Por la naturaleza del problema, en donde la función "y" representa una varianza, no tiene sentido considerar la gráfica correspondiente al tercer y cuarto cuadrantes.
- 2ª Si  $b_2 > 0$ , a medida que aumenta  $b_2$  crece la varianza del modelo pearsoniano, hasta su mayor valor, que corresponde a  $A^2/12$  que es la varianza de la distribución rectangular, que se utiliza cuando el nivel de información que se dispone para realizar las estimaciones es mínimo.

Como se observa son conclusiones análogas a las obtenidas para el caso particular.

Por una parte este procedimiento permite seleccionar, *a priori*, una varianza determinada entre 0 y  $A^2/12$  y obtener el valor de  $b_2$  correspondiente, bien gráfica o analíticamente. Y en el caso de que liberemos a  $b_2$  de la restricción de positividad, se pueden determinar modelos con mayor varianza que  $A^2/12$ , pero que desde el punto de vista práctica no tienen interés alguno. Considerando todo lo expuesto en este apartado, se está en condiciones de abordar los



comentarios sobre las varianzas que se determinó en (13) y que allí se pospusieron.

Cuando  $b_2$  es de la forma  $1/s$ , significa que cuanto menor sea  $s$  mayor será  $b_2$  y, por la condición segunda, mayor su varianza, y, como el caso de  $s = 4$  ha sido suficientemente estudiado, sólo quedan para ponderaciones enteras los casos correspondientes a  $s = 2$  y  $s = 3$  que dan unas varianzas

$$s = 2 \rightarrow \mathbf{s}^2 = \frac{3(Q_i^o - Q_i^p)^2 + 4(Q_i^m - Q_i^p)(Q_i^o - Q_i^m)}{80}$$

$$s = 3 \rightarrow \mathbf{s}^2 = \frac{4(Q_i^o - Q_i^p)^2 + 9(Q_i^m - Q_i^p)(Q_i^o - Q_i^m)}{150}$$

que son mayores que la correspondiente a los modelos análogos al modelo clásico que se obtiene para  $s = 4$ . Aunque estos modelos tienen la contrapartida de que ponderan en menor grado la estimación del flujo de caja más probable. Igual condición, pero en sentido opuesto, debe decirse para los modelos de  $s > 4$ . En esta línea se tiene el siguiente resultado: “A medida que la presunción de exactitud sobre la estimación de  $Q_i^m$  se fortalece, por lo que su coeficiente de ponderación aumenta, la varianza de  $Q_i^r$  disminuye y, recíprocamente, cuando la ponderación disminuye, la varianza aumenta”.

### 7. FUTURAS VÍAS DE INVESTIGACIÓN

Varias son las vías por las que se puede ampliar el presente trabajo, entre las que destacamos las siguientes:

- 1ª Si se considera en vez del sistema de Pearson como sistema generador de modelos, el sistema de Roy, la cantidad de modelos se incrementará notablemente.
- 2ª Tanto es los últimos modelos como los que se han obtenido deducidos del sistema de Pearson en este trabajo, pueden reforzarse en la línea de los trabajos de Perry y Creig (1975) y Moder y Rodgers (1968) con estimaciones de las características estocásticas basadas, no en los extremos del recorrido, sino en los percentiles. Así, por ejemplo,  $\mathbf{m}_a = (a_a + 4m + b_{100-a})/6$ .
- 3ª En cierta forma los resultados correspondientes al modelo clásico, puestos de manifiesto en este trabajo, en particular el valor de  $Q_i^m$  en función de  $Q_i^o$  y  $Q_i^p$  pueden servir para establecer: 1º un test de adecuación del modelo

clásico y 2º un test de valoración de la pericia del técnico que realizó las estimaciones.

- 4ª La mayoría de las aplicaciones donde se utiliza la distribución beta como modelo pueden estudiarse bajo el prisma de los modelos análogos aquí introducidos, véase por ejemplo Stewart (1979).
- 5ª La adecuación de la teoría del PERT a estos modelos alternativos y su comparación empírica con el modelo clásico constituye, sin duda, el campo más amplio de extensión de estos resultados.

#### 8. REPRESENTACIÓN DE LA FUNCIÓN VARIANZA MEDIANTE ORDENADOR

La varianza del sistema de Pearson puede expresarse con la notación abreviada empleada en el apartado 6 mediante:

$$y = \frac{A^2 x^3 + A^2 x^2 + BCx}{12x^3 + 16x^2 + 7x + 1}$$

verificándose las siguientes condiciones entre los parámetros:

$$A^2 - 4BC > 0, \quad B > 0, \quad C > 0 \quad \text{y} \quad A = B + C$$

De ello pueden deducirse los siguientes hechos:

- Normalizando la función para  $A=1$ , resulta que para  $B=0,3$  y  $C=0,7$ , por ejemplo, se obtiene la misma función que para  $B=0,7$  y  $C=0,3$ .
- Para los valores de  $A$  diferentes de uno, las representaciones serían análogas al caso normalizado, ya que sólo se modificarían proporcionalmente las unidades de los ejes coordenados.
- Para  $B=C$  se obtiene el caso particular A) del apartado 6, que corresponde al modelo simétrico de la distribución de probabilidad.

Por consiguiente, y para disponer de una apropiada visión del funcionamiento de la varianza, para los distintos valores de los parámetros  $A$ ,  $B$  y  $C$ , basta con representar la función normalizada para los valores de  $B=0,1$ ,  $B=0,2$ ,  $B=0,3$  y  $B=0,4$ . Esto es lo que se ha realizado en un microordenador y cuyos resultados, que no difieren de los obtenidos en el apartado 6, se sintetizan a continuación.

Valores de los parámetros:  $A=1$ ,  $B=0,1$  y  $C=0,9$

Asíntotas:  $y=0,0833$ ,  $x=-0,5$  y  $x=-0,33$

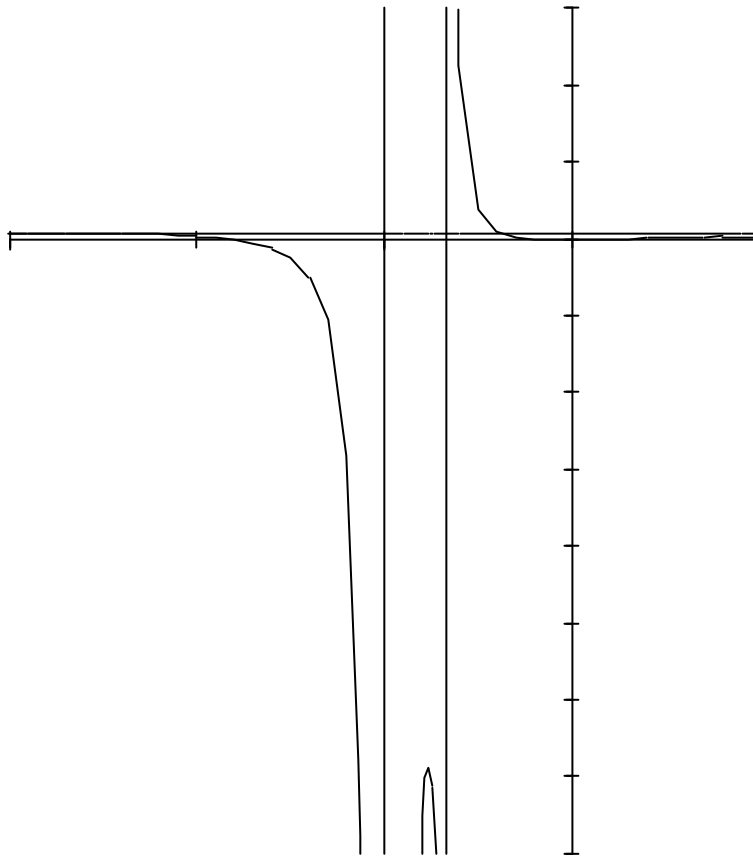
Cortes asintota:  $x=-1,285$  y  $x=-0,19$

Puntos de corte:  $(-0,9, 0)$ ;  $(-0,1, 0)$  y  $(0, 0)$

Máximo:  $(-0,381, -6,8598)$

Mínimo:  $(-0,058, -0,0032)$

Inflexión:  $(0,076, 0,008)$



Valores de los parámetros:  $A=1$ ,  $B=0,2$  y  $C=0,8$

Asíntotas:  $y=0,0833$ ,  $x=-0,5$  y  $x=-0,33$

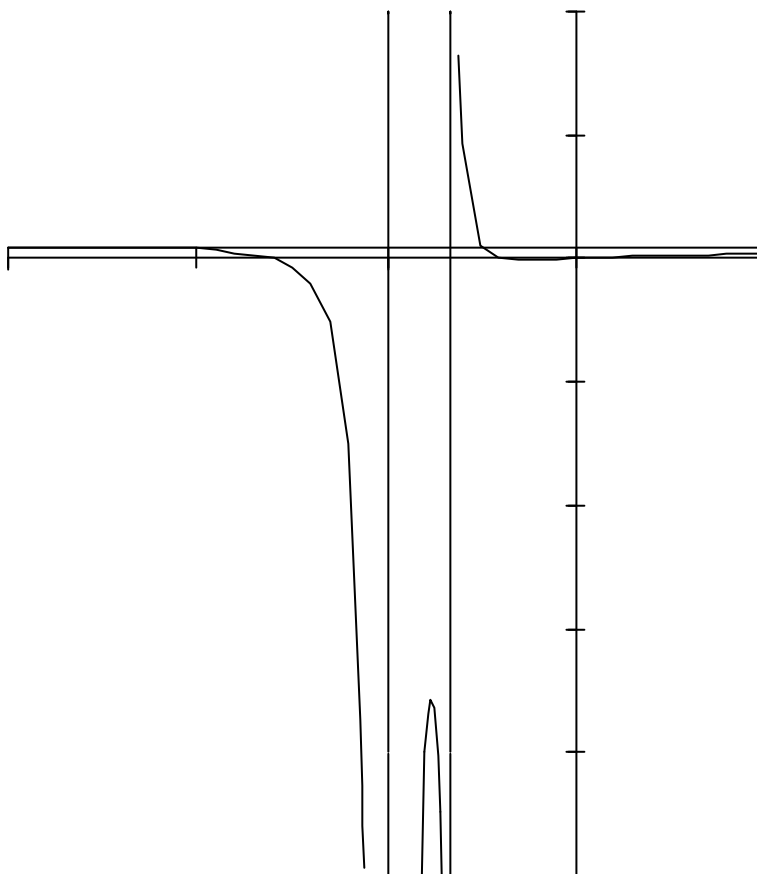
Cortes asintota:  $x=-1,03$  y  $x=-0,124$

Puntos de corte:  $(-0,8, 0)$ ;  $(-0,2, 0)$  y  $(0, 0)$

Máximo:  $(-0,378, -3,5591)$

Mínimo:  $(-0,139, -0,0184)$

Inflexión:  $(-0,035, -0,006)$



Valores de los parámetros:  $A=1$ ,  $B=0,3$  y  $C=0,7$

Asíntotas:  $y=0,0833$ ,  $x=-0,5$  y  $x=-0,33$

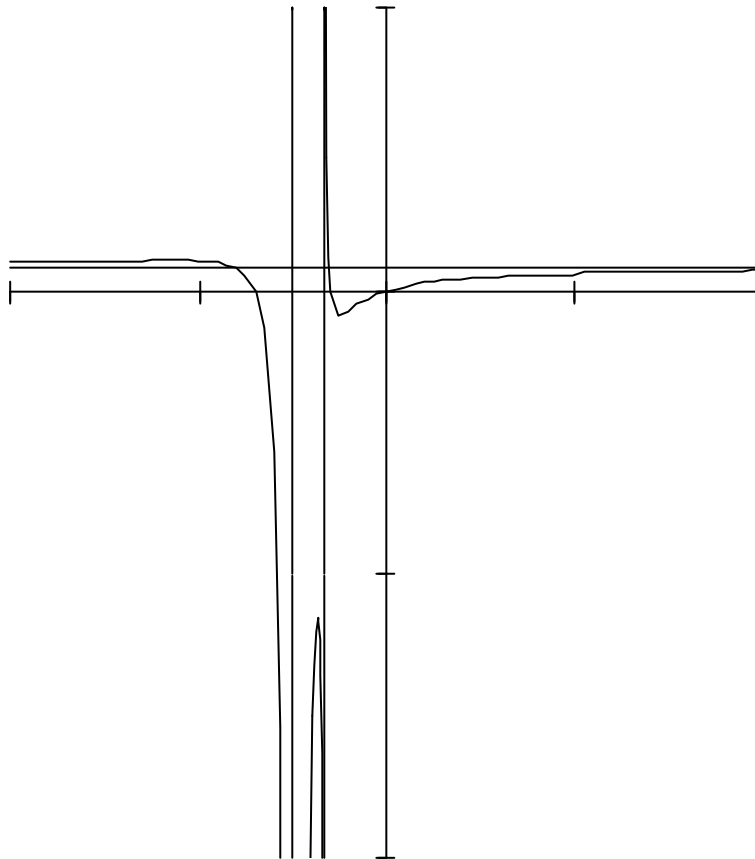
Cortes asintota:  $x=-0,812$  y  $x=-0,31$

Puntos de corte:  $(-0,7, 0)$ ;  $(-0,3, 0)$  y  $(0, 0)$

Máximo:  $(-0,367, -1,1458)$

Mínimo:  $(-0,256, -0,09052)$

Inflexión:  $(0,201, -0,007)$



Valores de los parámetros:  $A=1$ ,  $B=0,4$  y  $C=0,6$

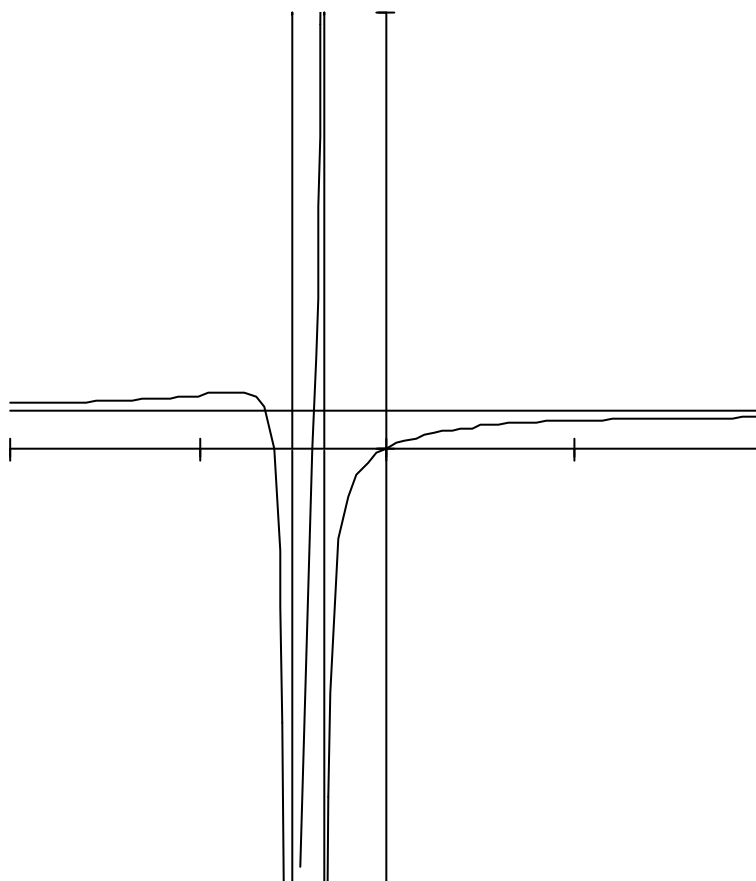
Asíntotas:  $y=0,0833$ ,  $x=-0,5$  y  $x=-0,33$

Cortes asintota:  $x=-0,64$  y  $x=-0,39$

Puntos de corte:  $(-0,6, 0)$ ;  $(-0,4, 0)$  y  $(0, 0)$

Máximo:  $(-0,791, 0,127)$

Inflexión:  $(-0,396, -0,040)$



9. COMPARACIÓN EXPERIMENTAL DE ALGUNOS MODELOS ESTUDIADOS

Finalmente queremos proponer una fórmula aproximada para la varianza de los modelos análogos al modelo clásico, aprovechando el hecho de que, en general,

$$(Q_i^o - Q_i^p)^2 \geq (Q_i^m - Q_i^p)(Q_i^o - Q_i^m),$$

(la igualdad se da cuando  $Q_i^m = (Q_i^o + Q_i^p)/2$ ),

por lo que puede sustituirse la expresión de la varianza (9) por una mayor tal, como:

$$s_A^2 = \frac{5}{7} \frac{(Q_i^o - Q_i^p)^2}{36} + \frac{4}{7} \frac{(Q_i^o - Q_i^p)^2}{36} = \frac{(Q_i^o - Q_i^p)^2}{28} \tag{15}$$

expresión que tiene la misma sencillez que la del modelo clásico, pero que asegura una varianza mayor en todos los casos, salvo en aquellos que  $Q_i^m = (Q_i^o + Q_i^p)/2$ , en los que ambas varianzas coinciden.

Efectivamente, en tal caso basta comprobar que

$$16(Q_i^o - Q_i^m)(Q_i^m - Q_i^p) = 4(Q_i^o - Q_i^p)^2$$

y se obtiene, de la expresión (9), la (15).

Veamos cómo se comportan las varianzas de algunos modelos estudiados, para lo cual vamos a utilizar el ejemplo recogido en la tabla 2 del trabajo de Herrerías-Calvete (1987), aumentándolo con las varianzas correspondientes al modelo de Pearson análogo al clásico, el modelo simple análogo a la distribución triangular y la fórmula aproximada para la varianza (15). Los resultados se dan en la tabla del final del trabajo y de su observación se pone de manifiesto lo siguiente:

- 1º Al contrario de lo que ocurre con la varianza de la distribución beta-PERT, que es insensible al valor de  $Q_i^m$ , el modelo Pearsoniano es sensible a dicho valor. Considérense las columnas correspondientes a los años 1 y 7, 2 y 3, 8 y 9, no ocurriendo esto con las 5 y 6 por motivos obvios.
- 2º La varianza del modelo simple es sensiblemente mayor que la de la distribución triangular, tal como se puso en evidencia en el apartado 5, A) 2.
- 3º La varianza que suministra la fórmula aproximada está muy cercana a la varianza exacta del modelo Pearsoniano, coincidiendo con ella cuando la distribución es simétrica, tal como ocurre en la columna correspondiente al año 8.
- 4º Aunque en este ejemplo las varianzas van aumentando a medida que se desciende en las filas, hay que tener en cuenta que:  $s_B^2 \leq s_P^2$ , siempre que se

verifique (10), o su regla equivalente  $Q \leq 3 + 2\sqrt{2}$ , que en este caso se cumple en los diez años; pero, además, la tabla sugiere demostrar que  $\mathbf{s}_T^2 \geq \mathbf{s}_A^2$ .

Efectivamente, comparando ambas varianzas se tiene que:

$$5(Q_t^o - Q_t^p)^2 - 14(Q_t^o - Q_t^m)(Q_t^m - Q_t^p) \geq 0,$$

y esto se cumple siempre, ya que

$$(Q_t^o - Q_t^p)^2 \geq 4(Q_t^o - Q_t^m)(Q_t^m - Q_t^p)$$

Por tanto puede establecerse la siguiente cadena de desigualdades entre las varianzas, en general:

$$\mathbf{s}_P^2 \leq \mathbf{s}_A^2 \leq \mathbf{s}_T^2 \leq \mathbf{s}_S^2 \leq \mathbf{s}_U^2,$$

y en el caso de que  $Q \leq 3 + 2\sqrt{2}$ , la cadena se amplía por la izquierda con la distribución beta, resultando:

$$\mathbf{s}_B^2 \leq \mathbf{s}_P^2 \leq \mathbf{s}_A^2 \leq \mathbf{s}_T^2 \leq \mathbf{s}_S^2 \leq \mathbf{s}_U^2$$

## BIBLIOGRAFÍA

- CANSADO, E. (1950). Exposición sistemática de las distribuciones de Pearson. *Trabajos de Estadística*, vol I, cuad. III, pp 279-287.
- COMMISSARIAT A L'ENERGIE ATOMIQUE (1978). *Statistique appliquee a l'exploitation des mesures*. Tomo I. Masson.
- DUMAS DE RAULY, D. (1968). *L'estimation statistique*. Gauthier-Villars
- ELDERTON, W.P y JOHNSON N. L. (1969). *Systems of frequency curves*. Cambridge University Press.
- HERRERÍAS, R. y CALVETE, H. (1987). "Una ley de probabilidad para el estudio de los flujos de caja de una inversión". *Libro-Homenaje al Prof. Gonzalo Arnauz Vellando*, pp 279-296, INE, Madrid.
- HILLIER, I. y LIEBERMAN, G. J. (1982). *Introducción ala Investigación de Operaciones*. McGraw-Hill.
- MILLER, R.W. (1970). *Aplicación al método PERT*. Ediciones del Castillo.
- MODER, J. J. y RODGERS, E. G. (1968). Judgment estimates of thr moments of PERT type distributions. *Management Sciencie*, vol 15, n° 2 pp B-76 a B-83.
- PEARSON, E. S y TUKEY, J. W. (1965). Approximate means and standard deviations based on distances between percentage points of frequency curves. *Biometrika* 52, 533-546.
- PERRY, C. y GREIG, I. D. (1975). Estimating the mean end variance of subjective distributions in PERT decision analysis. *Managment Sci.* 21, pp 1477-1480



REY PASTOR, J.; PI CALLEJA, P. y TREJO, C..A. (1969). *Análisis matemático*, tomo I, 8ª edición. Kapelusz.

ROY, L.K. (1971). An extension of the Pearson systems of frequency curves. *Trabajos de Estadística e I.O.* Vol XXII, cuads 1 y 2, pp. 113-123.

STEWART, J.F. (1979). The beta distributions as a model of behavior in consumer goods markets. *Management Science*, Vol XXV, n° 9, pp 813-821.

SUÁREZ, A. S. (1980). *Decisiones óptimas de inversión y financiación en la empresa*. Ed. Pirámide Madrid.

TAHA, H.A. (1981). *Investigación de Operaciones*. Representaciones y Servicios de Ingeniería S.A. México

VAZSONYI, A. (1970). L'Histoire de Grandeur et de la Décadence de la Méthode PERT. *Management Science*, Vol XVI, n° 8, pp B-449 a B-455.

YU CHUEN-TAO, L. (1980). *Aplicaciones prácticas del PERT y CPM*. Gestión-Deusto.

Año \ $Q_t^r$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$Q_t^p$	2	3	3	2	3	3	2	1	1	1
$Q_t^m$	4	6	6,5	5,5	7	6	3,5	3,5	3	2
$Q_t^o$	8	8	8	8	10	10	8	6	5	5
$S_{BETA}^2$	1	0,69	0,69	1	1,36	1,36	1	0,69	0,69	0,44
$S_{PEARSON}^2$	1,22	0,82	0,82	1,26	1,73	1,73	1,14	0,89	0,87	0,50
$S_{APROX.}^2$	1,28	0,89	0,89	1,28	1,75	1,75	1,28	0,89	0,89	0,57
$S_{TRIAN}^2$	1,56	1,10	1,10	1,51	2,06	2,06	1,63	1,04	1,06	0,72
$S_{SIMPLE}^2$	2,22	1,53	1,53	2,24	3,05	3,05	2,18	1,56	1,55	0,97
$S_{UNIF.}^2$	3	2,08	2,08	3	4,08	4,08	3	2,08	2,08	1,33

Tabla de varianzas

Artículo defendido en la II Reunión Anual de ASEPELT-ESPAÑA, celebrada en 1988 en la Universidad de Valladolid. Publicado en las Actas de la mencionada Reunión: *Estudios de Economía Aplicada*, páginas 89 a 112, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Valladolid